TD 0 : Pour bien commencer

Fractions

Exercice 1: Simplifier les expressions suivantes (on donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible) :

a) $\frac{3}{4} - \frac{11}{10}$

b) $\frac{1}{36} - \frac{1}{45} + \frac{1}{9}$

c) $\dfrac{3}{\frac{3}{7}}$

d) $\dfrac{1}{\frac{63}{40}\frac{16}{27}}$

e) $\dfrac{\frac{7}{9}}{\frac{4}{2}}$

f) $\dfrac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$

Exercice 2: Comparer les nombres suivants :

a) $\frac{5}{12}$ et $\frac{3}{7}$

b) $\frac{16}{100}$ et $\frac{5}{33}$

Exercice 3: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 \neq b$.
Comment peut-on simplifier l'expression suivante : $\dfrac{a^4 - b^2}{a^2 - b}$?

Exercice 4: Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation : $\frac{1}{x} + x = 2$.

Exercice 5: Peut-on trouver deux nombres réels a et b tels que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \text{ ?}$$

Indication : réécrire l'équation en ne faisant intervenir que $x = \frac{b}{a}$.

Puissances

Exercice 6: Mettre sous forme d'une puissance de 2 :

a) $2^{12} \times (2^3)^6$

b) $(-2)^{2020}$

c) $\frac{8^4}{4^4}$

d) 4^{-5}

Exercice 7: Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de q^n :

a) q^{n+1}

b) q^{2n}

c) $\left(q^3\right)^n$

d) $q^{n+1} - q^n$

Exercice 8: Soit $n \in \mathbb{N}$. Mettre sous la forme $a \times b^n$ (où a et b sont réels).

a) 5^{2n-1}

b) $(-1)^n \times 2^{n+1}$

c) $\frac{1}{3^n}$

d) $\frac{2^{n+1}}{5^{n-2}}$

Exercice 9: Soient $r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $r^{2^{k+1}}$ en fonction de r^{2^k}.

Exercice 10: Comparer 2^{222} à 22^{22}.

Exercice 11: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant :

$$u_1 = 5 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$.

Exponentielle et logarithme népérien

Exercice 12: Simplifier :

a) $\ln(\mathbf{e}^2)$

b) $\mathbf{e}^{3\ln(2)}$

c) $\ln(12) - \ln(6)$

d) $\frac{(4+\ln(4))\mathbf{e}^{\ln(3)}}{\ln(4\mathbf{e}^4)}$

Exercice 13: Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier :

a) $\mathbf{e}^{2\ln(t)}$

b) $\mathbf{e}^{-\ln(t)}$

c) $\ln\left(\frac{1}{\mathbf{e}^{2t}}\right)$

d) $\ln\left(\frac{\mathbf{e}^{2t-1}}{\mathbf{e}^{-t}}\right)$

Exercice 14: Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{e}^t}{1+\mathbf{e}^{2t}} = \frac{\mathbf{e}^{-t}}{1+\mathbf{e}^{-2t}}.$$

Exercice 15: Résoudre l'équation, d'inconnue réelle x, suivante :

$$\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3\ln(2)$$

Second degré

Exercice 16: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 = 5$ b) $(u-7)^2 = 2$ c) $a^2 + 2 = 0$

<u>Exercice 17</u>: Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue réelle x :

$$2xy = x^2 - 1$$

<u>Exercice 18</u>: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

Inégalités

<u>Exercice 19</u>: Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$a \geqslant 3, \ \ b \geqslant 4, \ \ c \geqslant -2, \ \ d \leqslant -1\,.$$

On dit par exemple que a est minoré par 3 et que d est majoré par -1.
Donner, lorsque c'est possible, une majoration et/ou une minoration de :

a) $a+b+c$ d) a^2 g) ab

b) $-2a$ e) c^2 h) ac

c) $d-a$ f) $\mathbf{e}^d$ i) ad

<u>Exercice 20</u>: Résoudre les inéquations d'inconnue réelle x :

a) $\ln(2x) < \ln(3x)$ d) $\frac{2x+1}{x-1} < 0$

b) $\mathbf{e}^x + 1 < 0$ e) $x^2 + 5x \leqslant 6x$

c) $(5x-4)(4x-5) > 0$ f) $\frac{1}{x-1} \leqslant 1$

<u>Exercice 21</u>: Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x < \sqrt{x^2+1}$.