

## Fractions

**Exercice 1:** Simplifier les expressions suivantes (on donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible) :

- |  |  |
|--|--|
| a) $\frac{3}{4} - \frac{11}{10}$<br>b) $\frac{1}{36} - \frac{1}{45} + \frac{1}{9}$<br>c) $\frac{3}{\frac{3}{7}}$ | d) $\frac{1}{\frac{63}{40} \frac{16}{27}}$<br>e) $\frac{\frac{7}{9}}{\frac{4}{2}}$<br>f) $\frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$ |
|--|--|

**Exercice 2:** Comparer les nombres suivants :

- |                                    |                                       |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\frac{5}{12}$ et $\frac{3}{7}$ | b) $\frac{16}{100}$ et $\frac{5}{33}$ |
|------------------------------------|---------------------------------------|

**Exercice 3:** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $a^2 \neq b$ .

Comment peut-on simplifier l'expression suivante :  $\frac{a^4 - b^2}{a^2 - b}$  ?

**Exercice 4:** Résoudre dans  $\mathbb{R}^*$  l'équation :  $\frac{1}{x} + x = 2$ .

**Exercice 5:** Peut-on trouver deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} ?$$

*Indication : réécrire l'équation en ne faisant intervenir que  $x = \frac{b}{a}$ .*

## Puissances

**Exercice 6:** Mettre sous forme d'une puissance de 2 :

- |                            |                      |
|----------------------------|----------------------|
| a) $2^{12} \times (2^3)^6$ | c) $\frac{8^4}{4^4}$ |
| b) $(-2)^{2020}$           | d) $4^{-5}$          |

**Exercice 7:** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{R}$ . Exprimer en fonction de  $q^n$  :

- |              |                    |
|--------------|--------------------|
| a) $q^{n+1}$ | c) $(q^3)^n$       |
| b) $q^{2n}$  | d) $q^{n+1} - q^n$ |

**Exercice 8:** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Mettre sous la forme  $a \times b^n$  (où  $a$  et  $b$  sont réels).

- |                            |                              |
|----------------------------|------------------------------|
| a) $5^{2n-1}$              | c) $\frac{1}{3^n}$           |
| b) $(-1)^n \times 2^{n+1}$ | d) $\frac{2^{n+1}}{5^{n-2}}$ |

**Exercice 9:** Soient  $r \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $r^{2^{k+1}}$  en fonction de  $r^{2^k}$ .

**Exercice 10:** Comparer  $2^{222}$  à  $22^{22}$ .

**Exercice 11:** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle vérifiant :

$$u_1 = 5 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$ .

## Exponentielle et logarithme népérien

**Exercice 12:** Simplifier :

- |                   |   |
|-------------------|---|
| a) $\ln(e^2)$     | c) $\ln(12) - \ln(6)$                         |
| b) $e^{3 \ln(2)}$ | d) $\frac{(4 + \ln(4))e^{\ln(3)}}{\ln(4e^4)}$ |

**Exercice 13:** Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Simplifier :

- |                   |  |
|-------------------|--|
| a) $e^{2 \ln(t)}$ | c) $\ln\left(\frac{1}{e^{2t}}\right)$        |
| b) $e^{-\ln(t)}$  | d) $\ln\left(\frac{e^{2t-1}}{e^{-t}}\right)$ |

**Exercice 14:** Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{e^t}{1 + e^{2t}} = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-2t}}.$$

**Exercice 15:** Résoudre l'équation, d'inconnue réelle  $x$ , suivante :

$$\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3 \ln(2)$$

## Second degré

**Exercice 16:** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- |              |                  |                  |
|--------------|------------------|------------------|
| a) $x^2 = 5$ | b) $(u-7)^2 = 2$ | c) $a^2 + 2 = 0$ |
|--------------|------------------|------------------|

**Exercice 17:** Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue réelle  $x$  :

$$2xy = x^2 - 1$$

**Exercice 18:** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue réelle  $x$  :

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

### Inégalités

**Exercice 19:** Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que

$$a \geq 3, \quad b \geq 4, \quad c \geq -2, \quad d \leq -1.$$

Donner, lorsque c'est possible, une majoration et/ou une minoration de :

- |                |          |         |
|----------------|----------|---------|
| a) $a + b + c$ | d) $a^2$ | g) $ab$ |
| b) $-2a$       | e) $c^2$ | h) $ac$ |
| c) $d - a$     | f) $e^d$ | i) $ad$ |

**Exercice 20:** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations d'inconnue réelle  $x$  :

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $\ln(2x) < \ln(3x)$    | d) $\frac{2x+1}{x-1} < 0$ |
| b) $e^x + 1 < 0$          | e) $x^2 + 5x \leq 6x$     |
| c) $(5x - 4)(4x - 5) > 0$ | f) $\frac{1}{x-1} \leq 1$ |

**Exercice 21:** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $x < \sqrt{x^2 + 1}$ .